数理解析研究所講究録
第 1843 巻 2013 年 140-145

Asirでの3変数陰関数描画

近藤 祐史*
YUJI KONDOH
香川高等専門学校
KAGAWA NATIONAL COLLEGE OF TECHNOLOGY

兵頭 礼子
NORIKO HYODO
アルファオメガ
ALPHAOMEGA INC.

村尾 裕一
HIROKAZU MURAO
電気通信大学
UNIVERSITY OF ELECTRO-COMMUNICATIONS

齋藤 友克
TOMOKATSU SAITO
アルファオメガ
ALPHAOMEGA INC.

1 はじめに

近年のコンピュータにおける計算能力の向上は目覚ましく，今まで非常に計算時間が必要とされると思われてきた計算を，意味ある時間内にできるようになってきている．筆者らの一部は，文献 [2][3] において，2変数の陰関数描画の忠実な描画手法を提案した．3変数の陰関数については，多数のグレブナー基底計算を要するため，計算時間の増大が予想された。

しかし，近年のコンピュータにおける計算能力の向上により，3変数の陰関数の描画を行える環境が整ってきた．そこで，本稿では，3変数の陰関数描画について Asir 上で試作を行ったので，報告する．

2 2変数の陰関数描画

2変数では，表示できる精度に分割した格子の1つの Cell 内に $f(x,y)=0$ の零点が含まれるかどうかを指標関数に基づき判定する方法を提案した [2][3].

関数の零点を描画するためには，描画装置が存在する．つまり，関数の零点描画とは，描画装置に依存していることを認識する必要がある．その装置により描画する画素の単位を Cell と呼ぶ．この単位は，装置の限界性能の必要性はなく，利用者の必要な精度であることからあえて装置解像度ではなく Cell と呼ぶ．単純に Cell とは何かといえば零点描画をする場合の描画最小単位のことである．

定義 1 (Cell の定義) 表示領域 D 上の C_k $(k=1,\ldots,m)$ が D 上定義された *Cell* であるとは，

1. $D=\bigcup_{k=1}^{m} C_k, \qquad C_k^i \bigcap C_j^i=\phi, \qquad k\neq j,$

2. 各 C_k の *Jordan* 測度はゼロではない，

とする．ここで C_k^i は，C_k の内点の全体とする．

*kondoh@di.kagawa-nct.ac.jp

2.1 描画関数 (Character)

描画空間の定義の Cell が定まった状態で描画を定める描画関数 (Character) を定義する.

定義 2 (Character の定義) *D 上定義されている関数 f の Cell の族 $\{\mathcal{C}_k\}$ による Character χ とは,*

1. $\chi : \{\mathcal{C}_k\} \to \{0,1\}$
2. $\chi(\mathcal{C}_k) = 0$ ならば $\mathcal{C}_k$ の任意の元 x に対し $f(x) \neq 0$

とする.

この描画関数の意味は, 関数 $f(x)$ の零点を含む Cell に対する値は 1 である. つまり描画される. $\chi(\mathcal{C}_k) = 1$ の場合は, 零点を含む可能性があることである. この可能性の程度を定めることにより描画関数は, 様々なものが考えられる. さらに, 描画関数全体は, 包含関係により束の代数構造を持つ. この束の極大元が存在しその元が Faithful Character であることが示されている [2].

定義 3 (Faithful Character) *D 上定義されている関数 f の Cell $\{\mathcal{C}_k\}$ による Faithful Character とは,*

$$\chi(\mathcal{C}_k) = \begin{cases} 0 & f(x) \neq 0 \quad {}^{\forall}x \in \mathcal{C}_k \\ 1 & f(x) = 0 \quad {}^{\exists}x \in \mathcal{C}_k \end{cases}$$

ここで Character の値が 1 の場合に点 (Cell) を描画する.

実用のためには Character の概念を弱めた Weak Character と呼ばれるものを考えることは重要である. 条件を弱めるとは, $\chi(\mathcal{C}_k) = 0$ であっても解を含む場合がある, とすることである. この弱い Character の例として Sign Weak Character などがある.

以下, 2 変数の場合の Character を示す.

- Signature Character

  定義 4 (Sign Weak Character) *D 上の Cell 族 $\{\mathcal{C}_k\}$ による関数 $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$ に対する Sign Weak Character σ とは,*

  1. $\sigma : \{\mathcal{C}_k\} \to \{0,1\}$
  2. $\sigma(\mathcal{C}_k) = \begin{cases} 1 & \mathcal{C}_k \text{の } 2^n \text{ 個の端点の関数値の符号が異なっている} \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$

- Boundary Character

  定義 5 (Boundary Character) *D 上の Cell 族 $\{\mathcal{C}_k\}$ による関数 $f(x,y) = 0$ に対する Boundary Character β とは,*

  1. $\beta : \{\mathcal{C}_k\} \to \{0,1\}$
  2. $\beta(\mathcal{C}_k) = \begin{cases} 1 & \{(x,y) \in \mathcal{C}_k | f(x,y) = 0\} \cap \partial\bar{\mathcal{C}}_k \neq \phi \\ 0 & \textit{otherwise} \end{cases}$

  ここで $\partial\bar{\mathcal{C}}_k$ は Cell $\mathcal{C}_k$ の閉包の境界をなす集合である.

  大雑把にいえば, この Character は零点が Cell の境界上にある場合に 1 となる. この Character の実装としては, 関数が 2 変数有理係数代数関数であれば, Sturm 列を求め Sturm の定理により解の判定が確実にできることを利用すれば計算できる.

- Faithful Character

  $\chi(\mathcal{C}_k)=1$ ならば $\mathcal{C}_k$ の任意の元 x に対し，$f(x)=0$

  Faithful Character 定義 3 の Faithful Character は，Character の中で最も正しい Character である．現在この Character の実現可能な関数は，多変数多項式の場合のみである．

  1. $f(x,y)$ を無平方化する．以下この無平方化した関数に関して実行する．
  2. Boundary Character を実行する．
  3. $\left\{\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, f(x,y)\right\}$ の Gröbner 基底を求める．
  4. Gröbner 基底の解の属する Cell を決定する．(miniploy などを利用)

3 3変数陰関数描画

2 変数の場合と同様に考えると，必要な精度に分割した格子の 1 つのボクセル内に $f(x,y,z)=0$ の零点が含まれるかどうかを判定することになる．

- Signature Character

  8 個の格子点での $f(x,y,z)$ の符号により判定する．

- Boundary Character

  格子面上での 2 変数の陰関数と考え，2 変数の Faithful Character を用いる．

- Faithful Character

  Boundary Character の結果に加え，ボクセル内に埋没する構造を判定する必要がある．構造が，孤立点や閉曲面であれば，2 変数陰関数描画で行ったのと同様に，$\{f(x,y,z)=0, \partial f/\partial x=0, \partial f/\partial y=0, \partial f/\partial z=0,\}$ を解くことにより，判定できる．実際には，$\{f(x,y,z)=0, \partial f/\partial x=0\}$ を解くことで十分である．しかし，ボクセル内に埋没する構造が 3 次元空間での閉曲線の場合には，上記の方程式が 0 次元ではなくなるために計算できず，判定不能となる．この問題は，QE や CAD などの高度なアルゴリズムを用いることにより解決できるが，簡便な方法は知られていない．

4 実装

文献 [1] では，数式処理システム Asir 上のユーザ言語（以下，Asir 言語）を用いて試作を行った．Asir 言語のみの実装では，限られたグラフィックス機能しかないため，計算を終えた後の表示に時間がかかっていた．また，3 次元で表示されているものの認識を助けるための，視点の変更や回転，拡大縮小などの操作を実現することができない．そこで，本稿では計算部の変更はせず，表示部分のみ OpenGL を用いた実装へ変更する．実装は，3 変数での Signature Character と Boundary Character について行った．ここでは，Boundary Character での実行例を示す．

図 1 は，トーラス関数

$$16x^4+(32y^2+32z^2-40)x^2+16y^4+(32z^2-40)y^2+16z^4+24z^2+9$$

を $128\times128\times128$ 格子で表示した結果である．

次に図 2 は，ハート型関数

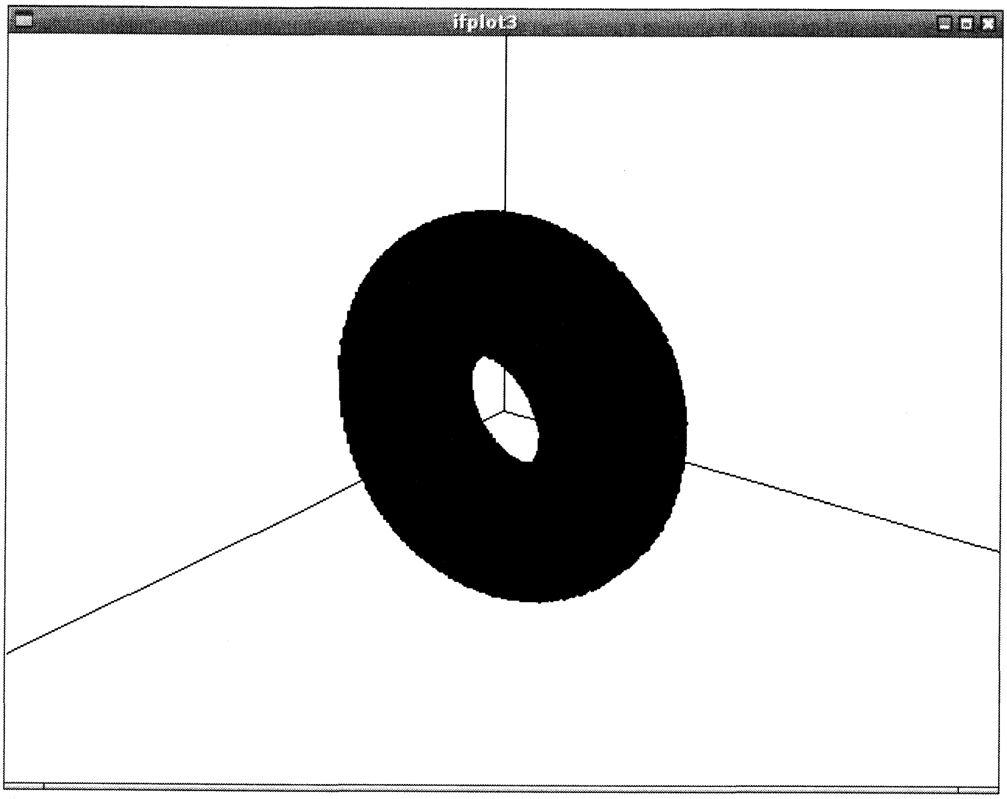

図 1: Boundary Character を用いたトーラス関数の表示

$$(x^2+y^2+2z^2-1)^3-x^2y^3$$

を $128\times128\times128$ 格子で表示した結果である.

図 3 は，球と平面が交わるような 3 次元空間上の曲線

$$(x^2+y^2+2*z^2-1)^2+(x-1/32)^2$$

を $128\times128\times128$ 格子で表示した結果である.

これらの実装により，実用上は問題なく 3 変数陰関数の描画を行える.

5 まとめ

3 変数陰関数描画 $f(x,y,z)=0$ について検討し，試作を行った. 既に報告している Asir のユーザ言語を用いた 3 変数の Signature Character と Boundary Character に変更を加え，より詳細に表示できるよう OpenGL による実装を行った. これにより微細にディスプレイ上に表示でき，実用上は問題ないと思われる. この Boundary Character で表示できないのは，ボクセル内に完全に入っている孤立点，閉曲面，閉曲線といった表示領域に比べ非常に微小な構造である.

今後，なめらかに表示するためのボクセルの表現方法や簡便な方法は未解決でる Faithful Character の実現方法などの検討が必要である. また，実用に耐える実装を行い公開できるものを作っていきたい.

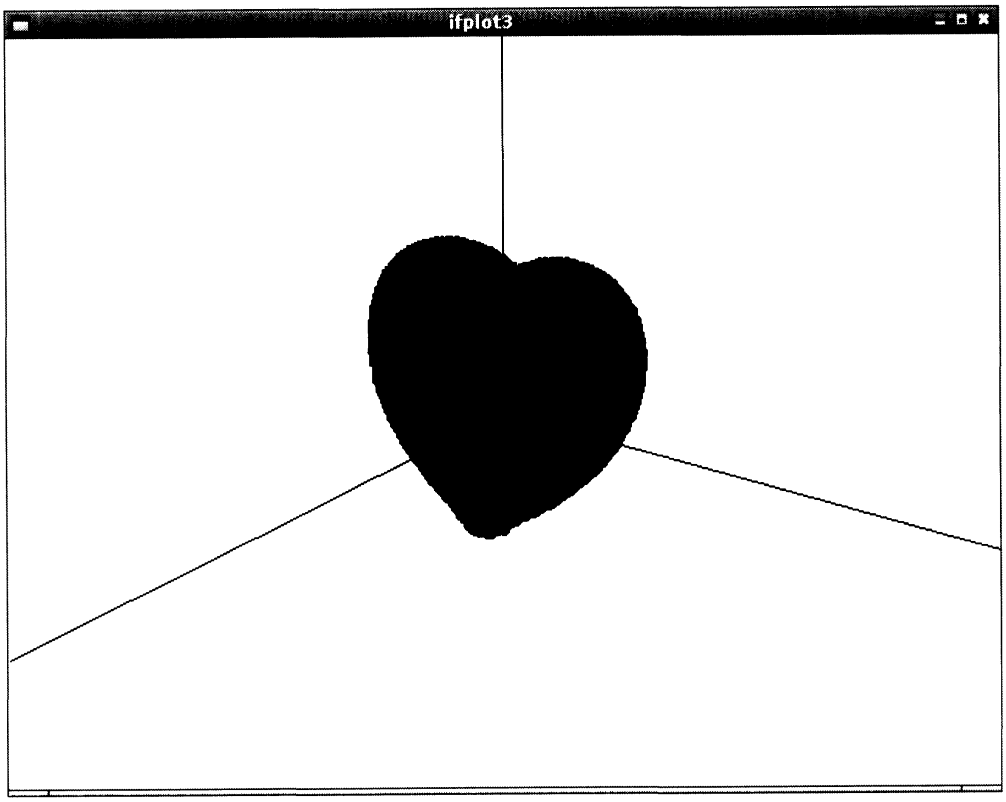

図 2: Boundary Character を用いたハート型関数の表示

参 考 文 献

[1] 近藤祐史，兵頭礼子，村尾裕一，齋藤友克， 3変数の陰関数描画について， 数式処理，**18**(2), 2012, 68–71.

[2] 齋藤友克，近藤祐史，三好善彦，竹島卓，Displaying real solution of mathematical equations，数式処理，**6**(2), 1998, 2–21.

[3] T. Saito, Y. Kondoh, Y. Miyoshi and T. Takeshima, Faithful plotting of real curves defined by bivariate rational polynomials, 情報処理学会論文誌, **41**(4), 2000, 1009–1017.

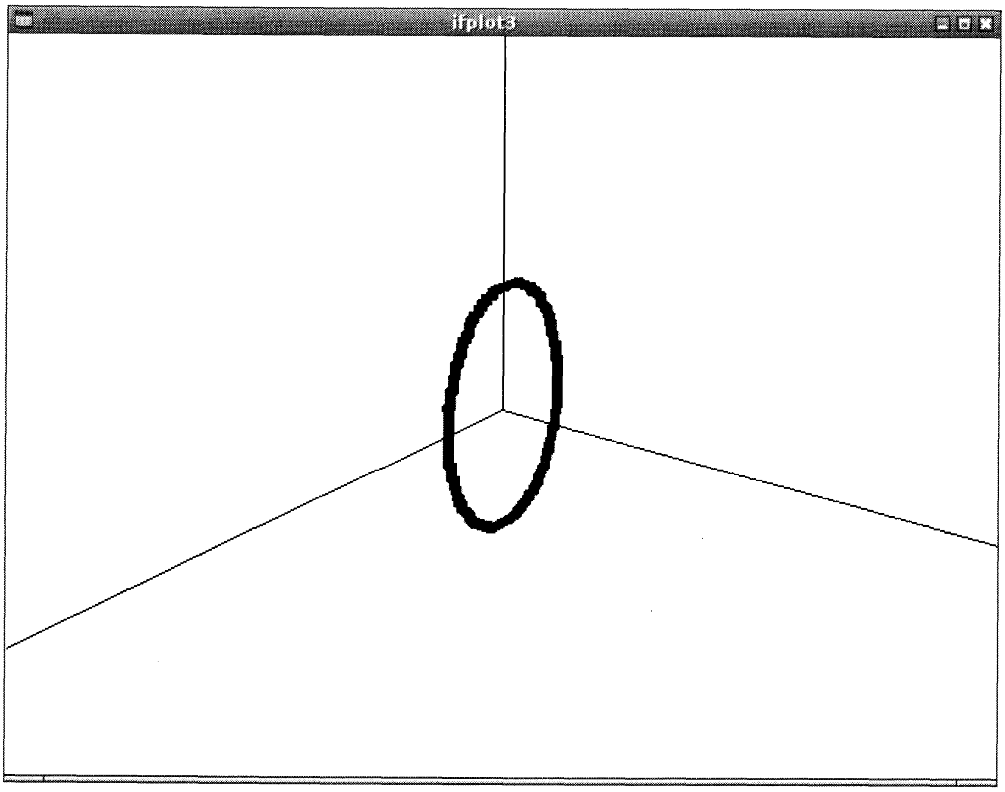

図 3: Boundary Character を用いた 3 次元空間上の曲線の表示